

**Задачи
международного конкурса
«Кенгуру»**

23.03.2023.

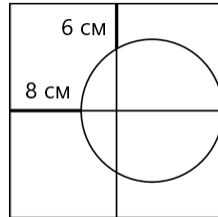
11-12 класс

25. Часть показанного на рисунке многочлена пятой степени не видна из-за чернильного пятна. Известно, что все пять корней многочлена являются целыми числами. Какова наибольшая степень $x - 1$, на которую делится многочлен?

$$x^5 - 11x^4 + \text{[пятно]} - 7$$

- (A) $(x - 1)^1$ (B) $(x - 1)^2$ (C) $(x - 1)^3$ (D) $(x - 1)^4$ (E) $(x - 1)^5$

26. Большой квадрат разделен на четыре меньших квадрата (см. рисунок). Окружность касается правой стороны квадрата в середине этой стороны. Какова длина стороны большого квадрата?

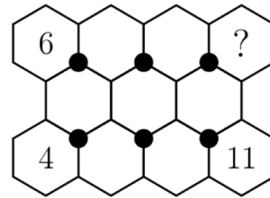


- (A) 18 см (B) 20 см (C) 24 см (D) 28 см (E) 30 см

27. При каком наименьшем натуральном числе n интервал $\left[\frac{n+8}{2}, \frac{2n+14}{3}\right]$ содержит не менее четырех натуральных чисел?

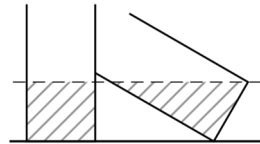
- (A) 19 (B) 18 (C) 17
(D) 16 (E) ни один из предыдущих ответов

28. Числа от 1 до 11 должны быть написаны в шестиугольниках так, чтобы сумма трех чисел вокруг каждой из шести черных точек была одинаковой. Три числа уже написаны. Какое число будет написано в шестиугольнике с вопросительным знаком?



- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

29. Два одинаковых цилиндрических резервуара содержат равное количество воды. Один цилиндр стоит вертикально, другой прислонен к нему, и уровень воды в каждом из них такой же, как на рисунке. Дно каждого из цилиндров представляет собой круг, площадь которого равна 3π м². Сколько воды, в м³, содержится в каждом резервуаре?



- (A) $3\sqrt{3}\pi$ (B) 6π (C) 9π
(D) $\frac{3\pi}{4}$ (E) невозможно определить, недостаточно информации

30. Произведение шести последовательных чисел представляет собой двенадцатизначное число вида $abb\ cdd\ cdd\ abb$. Цифры a, b, c и d , не обязательно в таком порядке, являются четырьмя последовательными числами. Каково значение цифры d ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Время, отведенное на решение задач, — 75 минут!

Задачи, оцениваемые в 3 балла

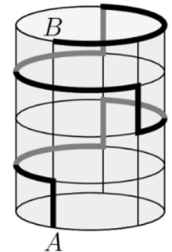
1. Чему равно значение выражения $\frac{7777^2}{5555 \times 2222}$?

- (A) 1 (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{49}{10}$ (D) $\frac{77}{110}$ (E) 49

2. Юлия бросает пять кубиков. Всего у нее выпадает 19 очков. Какое максимальное количество шестерок могло выпасть?

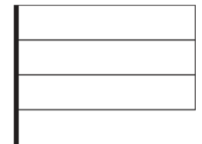
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

3. Банка цилиндрической формы имеет высоту 15 см. Периметр ее основания равен 30 см. Муравей ползет из точки А на нижнем основании в точку В на верхнем основании. Он ползет либо вертикально вверх, либо горизонтально по дугам окружности вокруг банки. Его путь показан толстой линией, черной на передней части банки и серой на задней. Какова длина пути муравья в см?



- (A) 45 (B) 55 (C) 60 (D) 65 (E) 75

4. У Эммы четыре фломастера разного цвета. Она хочет раскрасить трехполосный прямоугольный флаг (см. рисунок) так, чтобы каждая полоса была одного цвета и никакие две соседние полосы не были одинакового цвета. Сколькими способами она может это сделать?



- (A) 24 (B) 27 (C) 32 (D) 36 (E) 64

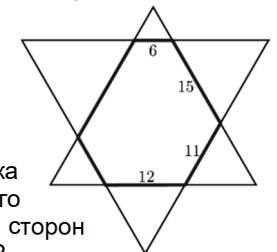
5. Назовем натуральное число n двупростым, если оно имеет ровно три различных делителя, а именно 1, 2 и само n . Сколько существует различных двупростых чисел?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

6. Сколько пар целых положительных чисел x и y удовлетворяют уравнению $x + 2y = 2^{10}$?

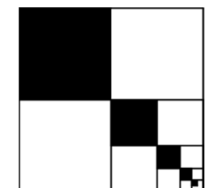
- (A) $2^9 - 1$ (B) 2^9 (C) $2^9 + 1$ (D) $2^9 + 2$ (E) 0

7. Составленные вместе два равносторонних треугольника образуют шестиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. На рисунке показаны длины четырех сторон этого шестиугольника. Чему равен периметр шестиугольника?



- (A) 64 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 72

8. Квадрат площадью 84 кв. ед. разделили на четыре квадрата и верхний левый квадрат закрасили черным. Нижний правый квадрат снова разделили на четыре квадрата и его верхний левый квадрат закрасили черным. Процесс повторяется бесконечное число раз. Какова общая площадь части большого квадрата, закрашенной черным?



- (A) 24 (B) 28 (C) 31 (D) 35 (E) 42

9. Каждое из целых чисел от 1 до 9 нужно поместить в одну из девяти клеток на рисунке так, чтобы сумма любых трех чисел в последовательных клетках была кратна трём. Числа 7 и 9 уже размещены. Сколькими различными способами можно заполнить оставшиеся клетки?



- (A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

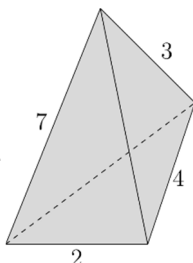
10. Какова цифра единиц произведения $(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1)$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Задачи, оцениваемые в 4 балла

11. Треугольная пирамида имеет ребра целочисленной длины. Длины четырёх рёбер показаны на рисунке. Чему равна сумма длин двух других ребер?

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13



12. Для натурального числа n число $n!$ определяется как произведение всех натуральных чисел от 1 до n . Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Какова сумма цифр числа N , если $N! = 6! \cdot 7!$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 9

13. Все графики функций $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ проходят через одну и ту же точку независимо от того, какое значение a выбрано. Чему равна сумма координат этой точки?

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

14. Даны пять чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , сумма которых равна S . Известно, что $a_k = k + S$ для каждого целого $k, 1 \leq k \leq 5$. Каково значение S ?

- (A) -15 (B) $-\frac{15}{4}$ (C) $-\frac{4}{15}$ (D) $\frac{15}{4}$ (E) 15

15. Сколько пар целых чисел m и n удовлетворяют неравенству $|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

16. В кинотеатре в одном ряду сидят 23 животных. Каждое из животных либо бобёр, либо кенгуру. У каждого животного хотя бы один из соседей - кенгуру. Каково максимально возможное количество бобров в ряду?

- (A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 12

17. Число 5^{5^6} можно записать в виде n^n для некоторого целого числа n . Каково значение n ?

- (A) 5^{30} (B) 5^6 (C) 5^5 (D) 30 (E) 11

18. Леон начертил замкнутый путь на поверхности прямоугольного параллелепипеда. На какой из разверток может быть показан его путь?

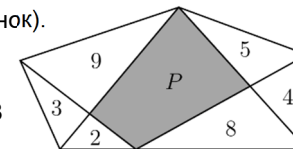


19. Пятиугольник разделен на меньшие части (см. рисунок).

Числа внутри треугольников обозначают их площади.

Какова площадь P закрашенного четырехугольника?

- (A) 15 (B) $\frac{31}{2}$ (C) 16 (D) 17 (E) 18



20. Сколько положительных целых чисел являются делителями числа $2^{20} \cdot 3^{23}$, но не являются делителями числа $2^{10} \cdot 3^{20}$?

- (A) 13 (B) 30 (C) 273
(D) 460 (E) ни один из предыдущих ответов

Задачи, оцениваемые в 5 баллов

21. Функции $f(x)$ и $g(x)$ для любых x из множества R удовлетворяют равенствам $f(x) + 2 \cdot g(1-x) = x^2$ и $f(1-x) - g(x) = x^2$. Какова функция $f(x)$?

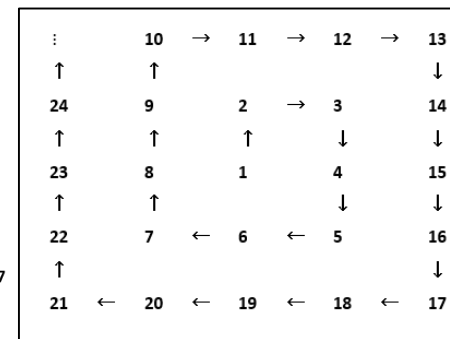
- (A) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ (B) $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ (C) $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$
(D) $x^2 - 4x + 5$ (E) таких функций нет

22. В соревнованиях по бouldерингу 13 альпинистов соревнуются в трех категориях. Количество очков каждого участника является произведением его рейтинга в трех категориях. Например, если один из них занимает 4-е, 3-е и 6-е места, то количество очков будет равно $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$. Чем больше количество очков участника, тем ниже его общий рейтинг. Анна занимает 1-е место в двух категориях. Каков ее самый низкий возможный общий рейтинг?

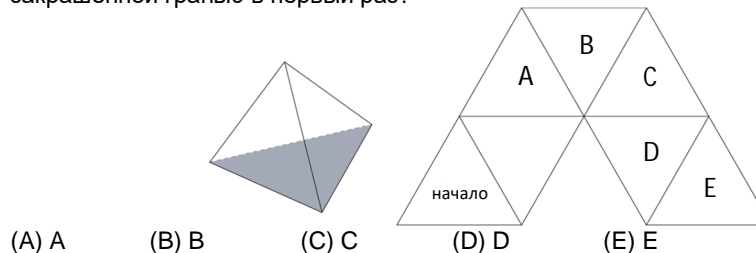
- (A) 2-й (B) 3-й (C) 4-й (D) 5-й (E) 6-й

23. На рисунке справа показана спираль из последовательных чисел, начинающаяся с 1. Когда спираль будет продолжена, как будут располагаться числа 625, 626 и 627?

- (A) $\begin{array}{c} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{array}$ (B) $\begin{array}{c} 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{array}$ \rightarrow $\begin{array}{c} 627 \end{array}$ (C) $\begin{array}{c} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{array}$
- (D) $625 \rightarrow 626$ (E) $625 \rightarrow 626 \rightarrow 627$



24. У треугольной пирамиды, все ребра которой равны, закрашена одна грань. Закрашенную грань пирамиды совмещают на доске с треугольником с надписью НАЧАЛО. Затем пирамиду поворачивают вокруг одного из ребер, перемещая её с одного треугольника на другой. На какой из треугольников пирамида снова встанет закрашенной гранью в первый раз?



- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E